

بررسی قابلیت توزیع‌های ترکیبی جهت مدل‌سازی زمان سفر

مجتبی رجبی بهاء‌آبادی (مسئول مکاتبات)، استادیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه یزد، یزد، ایران

E-mail: mojtaba.rajabi@yazd.ac.ir

چکیده

قابلیت اطمینان زمان سفر را می‌توان به‌عنوان عاملی مؤثر بر تصمیم‌گیری مسافران و شاخصی جهت ارزیابی عملکرد یک راه قلمداد کرد. سنجش قابلیت اطمینان زمان سفر یک راه، مستلزم تعیین توزیع احتمال زمان سفر آن راه است. پژوهش‌های اخیر نشان می‌دهند که توزیع‌های ترکیبی گزینه مناسبی جهت مدل‌سازی تغییرپذیری در زمان سفر هستند. باین وجود، در مطالعات گذشته، توانایی تنها سه توزیع ترکیبی خاص (توزیع‌های ترکیبی نرمال، لگ-نرمال و گاما) بررسی شده است. در پژوهش حاضر، به بررسی قابلیت طیف گسترده‌تری از توزیع‌های جهت مدل‌سازی تغییرپذیری در زمان سفر پرداخته می‌شود. برای دستیابی به هدف مطالعه و بررسی میزان مناسب بودن انواع مختلف توزیع‌های ترکیبی جهت مدل‌سازی ماهیت غیرقطعی زمان سفر از داده‌های تاریخیچه زمانی زمان سفر چندین مسیر برون‌شهری استفاده شده است. به‌منظور برآورد پارامترهای توزیع‌های ترکیبی از الگوریتم امید ریاضی-بیشینه‌سازی استفاده می‌شود. همچنین، جهت انتخاب مناسب‌ترین مدل، معیار اطلاعات آکائیک و معیار اطلاعات بیزی مورد استفاده قرار می‌گیرند. نتایج پژوهش حاضر نشان می‌دهد توزیع زمان سفر، چند مدی است؛ براین اساس، لزوم استفاده از توزیع‌های ترکیبی جهت مدل‌سازی زمان سفر محسوس است. علاوه بر این، بر اساس نتایج این پژوهش، توزیع ترکیبی بور بهترین برانش را بر داده‌های زمان سفر دارد. با عنایت به یافته‌های مطالعه حاضر، استفاده از توزیع‌های احتمال تک-مدی نظیر توزیع نرمال جهت مدل‌سازی زمان سفر توصیه نمی‌شود. علاوه بر این، پیشنهاد می‌شود از توزیع ترکیبی بور جهت مدل‌سازی زمان سفر استفاده شود.

واژه‌های کلیدی: قابلیت اطمینان زمان سفر، مدل‌سازی احتمالی، مدل‌های ترکیبی، تغییرپذیری زمان سفر

۱. مقدمه

(۲۰۰۶)، مسافران به دو دلیل قابلیت اطمینان زمان سفر را در تصمیم‌گیری‌های خود دخیل می‌کنند. اول به این دلیل که مسافران ممکن است با الزامات زمان‌بندی و پیامدهای مربوط به ورود زود هنگام یا دیرهنگام به مقصد مواجه باشند. دلیل دیگر این است مسافران به‌طور ذاتی از عدم قابلیت اطمینان در زمان سفر احساس ناراحتی و نگرانی می‌کنند [Bhat and Sardesai, 2006]. در رابطه با بررسی تأثیر قابلیت اطمینان زمان سفر بر تصمیم‌گیری مسافران پژوهش‌های گوناگونی انجام شده است. برای مثال، کریین و لوینسن^۲ (۲۰۱۳) به بررسی تأثیر قابلیت اطمینان زمان سفر بر انتخاب مسیر مسافران با استفاده از داده‌های حاصل از سامانه موقعیت‌یاب جهانی پرداختند. بر اساس نتایج مطالعه مذکور، متغیرهای مرتبط با قابلیت اطمینان زمان سفر در مدل‌های انتخاب مسیر همواره معنادار بودند [Carrion and Levinson, 2013]. تیلاهون و لوینسن^۳ (۲۰۱۰) از متوسط انحراف از برنامه زمانی برای مدل‌سازی تأثیر قابلیت اطمینان زمان سفر بر انتخاب مسیر مسافران استفاده کردند [Tilahun and Levinson, 2010]. نتایج مطالعه ایشان نشان می‌دهد که قابلیت اطمینان زمان سفر نقش معناداری در انتخاب مسیر مسافران ایفا می‌کند. تأثیر قابلیت اطمینان زمان سفر بر انتخاب شیوه سفر نیز در چندین مطالعه بررسی شده است. بر اساس نتایج پژوهش‌های گذشته، قابلیت اطمینان زمان سفر یک متغیر معنادار در مدل‌های انتخاب شیوه سفر بوده است [Bhat and Sardesai, 2006; Sweet and Chen, 2011].

جهت تعیین قابلیت اطمینان زمان سفر راه چندین شاخص ارائه شده است. برای مثال، لومکس و همکاران^۴ (۲۰۰۳) چندین شاخص جهت اندازه‌گیری میزان قابلیت اطمینان راه ارائه دادند [Lomax et al., 2003]. بر اساس نتایج پژوهش پیشگفته، شاخص‌های درصد تغییرات و زمان حائل شاخص‌های مناسبی جهت سنجش قابلیت اطمینان زمان سفر هستند. ون‌لینت^۵ و همکاران (۲۰۰۸) دو شاخص جدید برحسب صدک‌های ده، پنجاه و نود متغیر تصادفی زمان سفر ارائه دادند [Van Lint

زمان سفر در هر کمان شبکه از برهم‌کنش تقاضای سفر و عرضه حمل‌ونقل حاصل می‌شود. تقاضای سفر در روزهای مختلف سال و زمان‌های مختلف روز ثابت نیست. همچنین، عرضه فراهم‌شده توسط تسهیلات حمل‌ونقلی نیز، به دلایلی همچون تصادفات، تغییر شرایط جوی، انجام فعالیت‌های تعمیر و نگهداری راه و تنظیمات ابزارهای کنترل ترافیک تغییر می‌کند؛ بنابراین، با توجه به عدم قطعیت‌های موجود در تقاضای سفر و تغییرات در عرضه فراهم‌شده توسط تسهیلات حمل‌ونقلی، می‌توان نتیجه گرفت که زمان سفر در هر یک از کمان‌های شبکه متغیر است [Van Lint et al., 2008]. به بیانی شیواتر، یک مسافر در روزهای مختلف سال و در زمان‌های مختلف روز، زمان سفرهای متفاوتی را در یک کمان از شبکه به دلیل نوسانات در تقاضای سفر آن کمان یا تغییرات در عرضه آن کمان تجربه می‌کند. این بدین معنی است که زمان سفر، ماهیتی غیرقطعی یا به عبارتی دیگر تغییرپذیر دارد. تغییرپذیری در زمان سفر، اغلب، در قالب «قابلیت اطمینان زمان سفر» سنجش می‌شود. به بیانی دیگر، هر چه تغییرپذیری زمان سفر یک راه کمتر باشد، قابلیت اطمینان زمان سفر آن راه افزایش می‌یابد..

قابلیت اطمینان زمان سفر از دیدگاه متولیان سیستم حمل‌ونقل و نیز مسافران حائز اهمیت است [Taylor, 2017]. از دیدگاه متولیان سیستم حمل‌ونقل، قابلیت اطمینان زمان سفر به‌عنوان یک شاخص کارایی جهت ارزیابی عملکرد یک سیستم حمل‌ونقل قلمداد می‌شود. افزون بر این، متولیان سیستم حمل‌ونقل در پی کمی‌سازی اثرات بهبود در قابلیت اطمینان زمان سفر و دخیل نمودن این اثرات در فرایند ارزیابی اقتصادی پروژه‌های حمل‌ونقلی هستند [de Jong and Bliemer, 2015]. از دیدگاه مسافران نیز قابلیت اطمینان زمان سفر بسیار حائز اهمیت است. پژوهش‌های پیشین نشان می‌دهند که تصمیم‌گیری‌های مسافران (برای مثال، انتخاب مسیر و شیوه سفر) متأثر از قابلیت اطمینان زمان سفر است. بر اساس مطالعه بات و ساردیسای^۱

بررسی قابلیت توزیع‌های ترکیبی جهت مدل‌سازی زمان سفر

2012]. در پژوهش‌های دیگری نیز نظیر تیلور (2017)، گنج‌خانلو و همکاران (2020) و لو و ونگ^{۱۵} (2021) توزیع بور پیشنهاد شده است [Ganj Khanloo et al., 2020; Lu and Wang, 2021; Taylor, 2017]. اگرچه در مطالعات مذکور، از توزیع‌های تک-مدی^{۱۶} همچون توزیع گاما، لگ-نرمال و بور جهت مدل‌سازی زمان سفر استفاده شده است، در برخی از مطالعات اخیر با استفاده از داده‌های واقعی مشخص شده است که توزیع زمان سفر به صورت چند-مدی^{۱۷} است؛ لذا، توزیع‌های تک-مدی گزینه مناسبی جهت توصیف داده‌های زمان سفر نیستند [Ganj Khanloo et al., 2020; Ma et al., 2016]. یانگ و وو^{۱۸} (2016) [Yang and Wu, 2016] به بررسی توانایی توزیع‌های ترکیبی نرمال، لگ-نرمال و گاما جهت مدل‌سازی زمان سفر پرداختند. نتایج مطالعه فوق نشان داد که توزیع‌های ترکیبی پیش‌گفته با دقت مناسبی می‌توانند ماهیت احتمالی زمان سفر را مدل‌سازی نمایند. ما و همکاران^{۱۹} (2016) [Ma et al., 2016] به بررسی توزیع احتمال زمان سفر خطوط اتوبوس پرداختند. نتایج مطالعه ایشان نشان داد که توزیع زمان سفر اغلب چند-مدی است و توزیع ترکیبی نرمال را به‌عنوان یک گزینه مناسب جهت مدل‌سازی ماهیت احتمالی زمان سفر پیشنهاد دادند. در راستای مطالعه پیش‌گفته، رجیبی بهاء‌آبادی و همکاران (1397) با استفاده از داده‌های زمان سفر استخراج‌شده از سامانه موقعیت‌یاب اتوبوس‌رانی شهر تهران به تعیین بهترین توزیع احتمال جهت مدل‌سازی تغییرپذیری زمان سفر خطوط اتوبوس پرداختند. نتایج مطالعه نشان داد توزیع‌های ترکیبی نرمال و لگ-نرمال گزینه‌های مناسبی برای مدل‌سازی زمان سفر یک خط اتوبوس هستند.

علاوه بر اندازه‌گیری میزان قابلیت اطمینان زمان سفر، برآورد توزیع احتمال زمان سفر کاربردهای مختلفی در مسیریابی، زمان‌بندی ناوگان، برآورد و پیش‌بینی زمان سفر، بهینه‌سازی سیستم‌های توزیع کالا و غیره دارد. برای مثال، رجیبی بهاء‌آبادی و همکاران (2021) به حل مسئله مسیریابی وسیله نقلیه با

et al., 2008]. شاخص اول ارائه‌شده در مطالعه مذکور، میزان چولگی متغیر تصادفی زمان سفر و شاخص دوم، میزان پراکندگی متغیر تصادفی زمان سفر را می‌سنجد. تو^۶ و همکاران (2007) اختلاف بین صدک نود و صدک ۱۰ متغیر تصادفی زمان سفر را به‌عنوان یک معیار جهت ارزیابی قابلیت اطمینان زمان سفر ارائه دادند [Tu et al., 2007]. رجیبی بهاء‌آبادی و همکاران (2019) دو شاخص قابلیت اطمینان زمان سفر از دیدگاه مسافر پیشنهاد کردند. شاخص‌های پیشنهادشده، تغییرپذیری در زمان سفر را به دو مؤلفه تقسیم می‌کنند. مؤلفه اول، بیانگر سهمی از تغییرپذیری است که منجر به زود رسیدن مسافر به مقصد می‌شود؛ در مقابل مؤلفه دوم، مبین سهمی از تغییرپذیری است که منجر به دیر رسیدن مسافر به مقصد می‌شود [Rajabi-Bahaabadi et al., 2019]. خواننده محترم جهت مطالعه بیشتر در زمینه انواع شاخص‌های قابلیت اطمینان زمان سفر به مطالعات زانگ^۷ و همکاران (2022) و واکابایاشی^۸ (2011) ارجاع داده می‌شود [Wakabayashi, 2011; Zang et al., 2022].

سنجش قابلیت اطمینان زمان سفر یک راه، مستلزم تعیین توزیع احتمال زمان سفر آن راه است. جهت تعیین مناسب‌ترین توزیع احتمال برای مدل‌سازی ماهیت غیرقطعی زمان سفر، چندین مطالعه انجام شده است. هرمن و لم^۹ (1974)، پُلِس^{۱۰} (1979)، جردن و ترنکوئیست^{۱۱} (1979) توزیع گاما^{۱۱} را برای مدل‌سازی تغییرپذیری در زمان سفر پیشنهاد دادند [Herman and Lam, 1974; Jordan and Turnquist, 1979; Polus, 1979]. با توجه به چولگی توزیع احتمال زمان سفر، توزیع لگ-نرمال^{۱۲} توسط برخی از پژوهشگران جهت مدل‌سازی زمان سفر پیشنهاد شده است [Arezoumandi, 2011; Emam and AI-Deek, 2006; Faouzi and Maurin, 2007; Rakha et al., 2006; Uno et al., 2009]. تیلور و سوسیلواتی^{۱۳} (2012) چولگی قابل‌توجهی به سمت راست در داده‌های زمان سفر مشاهده کردند. بر این اساس، ایشان توزیع بور^{۱۴} را به‌عنوان ابزاری مناسب جهت مدل‌سازی قابلیت اطمینان زمان سفر پیشنهاد کردند [Taylor and Susilawati, 2012].

امکان تعمیم‌پذیری نتایج را محدود می‌سازد. در این راستا، در پژوهش حاضر داده‌های زمان سفر مربوط به هشت مسیر برای بازه زمانی یک‌ساله مورد استفاده قرار گرفته است.

• تاکنون قابلیت چندین توزیع احتمال تک-مؤلفه‌ای و توزیع‌های ترکیبی نرمال، لگ-نرمال و گاما جهت مدل‌سازی زمان سفر بررسی شده است. در این مطالعه توانایی توزیع احتمال ترکیبی بور، توزیع ترکیبی ویبال^{۲۰} و توزیع ترکیبی گوسی معکوس^{۲۱} نیز بررسی می‌شود. توزیع احتمال بور به دلیل قابلیت در نظر گرفتن چولگی شدید به سمت راست گزینه مناسبی برای مدل‌سازی زمان سفر است. با این وجود، در پژوهش‌های پیشین، توانایی توزیع بور ترکیبی جهت مدل‌سازی زمان سفر بررسی نشده است.

با توجه به موارد پیشگفته، به‌طور خلاصه، در پژوهش حاضر، ضمن استفاده از داده‌های زمان سفر مربوط به هشت مسیر، به بررسی توانایی چندین توزیع احتمال ترکیبی پرداخته خواهد شد. در ادامه این مقاله، ابتدا در بخش دوم، روش‌شناسی پژوهش ارائه می‌شود. سپس، داده‌های مورد استفاده در پژوهش حاضر تشریح می‌شوند. بخش چهارم به ارائه نتایج اختصاص دارد. در نهایت در بخش پنجم، افزون بر نتیجه‌گیری، پیشنهادهایی برای پژوهش‌های آتی ارائه می‌شود.

در نظر گرفتن عدم قطعیت زمان سفر پرداختند. در این مطالعه، توزیع زمان سفر به صورت لگ-نرمال فرض شد [Rajabi- Bahaabadi, 2021]. به‌عنوان یک نمونه دیگر، یائو و همکاران (۲۰۱۴) به طراحی شبکه حمل‌ونقل همگانی با در نظر گرفتن عدم قطعیت در زمان سفر پرداخت. در این مطالعه، توزیع زمان سفر به صورت نرمال فرض شد. نتایج مطالعه نشان داد که استفاده از روش پیشنهادی منجر به افزایش قابلیت اطمینان و کاهش زمان سفر در شبکه حمل‌ونقل همگانی می‌شود [Yao et al., 2014]. به‌عنوان یک کاربرد دیگر، جما و همکاران (۲۰۲۱) با استفاده از مدل‌های گوسی ترکیبی و رویکرد تلفیق داده به پیش‌بینی زمان سفر پرداختند. در این روش برای بازه‌های زمانی مختلف، به ازای هر داده جدید زمان سفر پارامترهای توزیع ترکیبی به‌هنگام می‌شود و ادامه از آن جهت پیش‌بینی زمان سفر استفاده می‌شود [Gemma et al., 2021].

جدول ۱ پژوهش‌های پیشین در زمینه تعیین توزیع احتمال مناسب جهت مدل‌سازی زمان سفر را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود دو ضعف ذیل در مطالعات پیشین مشهود است:

• داده‌های مورد استفاده جهت تعیین بهترین توزیع احتمال برای مدل‌سازی تغییرپذیری زمان سفر محدود به یک یا دو مسیر بوده است. محدودیت در داده‌های مورد استفاده به‌نوعی

جدول ۱. پژوهش‌های پیشین در زمینه تعیین توزیع احتمال زمان سفر

مطالعه	توزیع‌های مورد بررسی برتر	تعداد مسیر
راخا و همکاران (۲۰۰۶)	تعدادی توزیع تک-مؤلفه‌ای	۱
فائوزی و مائورین (۲۰۰۷)	تعدادی توزیع تک-مؤلفه‌ای	۱
امام و آیدک (۲۰۰۶)	تعدادی توزیع تک-مؤلفه‌ای	۱
آرزومندی (۲۰۱۱)	تعدادی توزیع تک-مؤلفه‌ای	۴
تیلور و سوسیلواتی (۲۰۱۲)	توزیع تک-مؤلفه‌ای بور	۱
ما و همکاران (۲۰۱۶)	تعدادی توزیع تک-مؤلفه‌ای و توزیع ترکیبی نرمال	۲
یانگ و وو (۲۰۱۶)	توزیع‌های ترکیبی نرمال، لگ-نرمال و گاما	۲
گنج خانلو و همکاران (۲۰۲۰)	تعدادی توزیع تک مؤلفه‌ای و توزیع ترکیبی نرمال	۱
لو و ودنگ (۲۰۲۱)	توزیع تک-مؤلفه‌ای بور	۱

بررسی قابلیت توزیع‌های ترکیبی جهت مدل‌سازی زمان سفر

مطالعه	توزیع‌های مورد بررسی برتر	تعداد مسیر
قویدل و همکاران (۲۰۲۲)	توزیع‌های ترکیبی نرمال، لگ-نرمال، گاما و ویبال	۱
رجبی بهاء‌آبادی و همکاران (۱۳۹۷)	توزیع‌های ترکیبی نرمال و لگ-نرمال	۱
مطالعه حاضر	توزیع‌های ترکیبی نرمال، لگ-نرمال، گاما، ویبال، گوسی معکوس و بور	۸

بر اساس روابط فوق می‌توان نتیجه گرفت که یک «توزیع تک-مؤلفه‌ای» مانند توزیع «نرمال» یک حالت خاصی از یک توزیع ترکیبی است که در آن H برابر با ۱ در نظر گرفته شده است. در مطالعه حاضر قابلیت توابع توزیع ترکیبی لگ-نرمال، گاما، بور، معکوس گوسی و ویبال جهت مدل‌سازی تغییرپذیری زمان سفر مورد استفاده قرار می‌گیرد. جدول ۲ تابع چگالی احتمال این توزیع‌ها را با H مؤلفه نشان می‌دهد. در جدول ۲، β_h ، α_h ، μ_h ، σ_h و γ_h پارامترهای مؤلفه h م توزیع‌های ترکیبی و π_h وزن متناظر با مؤلفه h م است.

۲-۲ برآورد پارامترهای توزیع ترکیبی

فرض شود x_1 ، x_2 ، ... و x_n بیانگر نمونه مشاهداتی مورد استفاده جهت برآورد پارامترهای توزیع ترکیبی (رابطه ۱) است. تابع بیشینه درستنمایی جهت برآورد پارامترهای مدل به صورت ذیل تعریف می‌شود [Tatiana et al., 2009]:

$$L_C(\Psi) = \prod_{i=1}^n \prod_{h=1}^H (\pi_h \phi_h(x_i | \theta_h))^{z_{ih}}, \quad (3)$$

که در آن z_{ih} برابر با ۱ است اگر x_i متعلق به مؤلفه h م باشد، در غیر این صورت مقدار آن برابر با صفر است. از آنجایی که لگاریتم تابعی صعودی است، اغلب برای تسهیل محاسبات تلاش می‌شود به جای بیشینه‌سازی رابطه (۳)، لگاریتم آن بیشینه شود. به عبارتی [Miljkovic and Grün, 2016]:

$$l_C(\Psi) = \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^H z_{ih} [\log(\pi_h) + \log(\phi_h(x_i | \theta_h))]. \quad (4)$$

در این مطالعه جهت برآورد پارامترهای توزیع ترکیبی از الگوریتم امید ریاضی-بیشینه‌سازی^{۲۲} (EM) استفاده می‌شود. الگوریتم امید ریاضی-بیشینه‌سازی یک روش تکراری جهت برآورد پارامترهای مدل ترکیبی است. هر تکرار الگوریتم شامل دو

۲. روش پژوهش

جهت در نظر گرفتن ماهیت غیرقطعی زمان سفر اغلب از تئوری‌های فازی یا احتمال استفاده شده است. در صورت مدل‌سازی زمان سفر با استفاده از تئوری فازی از اعداد فازی برای مدل‌سازی زمان سفر استفاده می‌شود (Saw et al., 2024). همچنین، در بسیاری از پژوهش‌ها، عدم قطعیت در زمان سفر در قالب توزیع احتمال زمان سفر مدل‌سازی شده است. هدف این بخش، نحوه مدل‌سازی عدم قطعیت زمان سفر با استفاده از توزیع‌های ترکیبی است.

۱-۲ توابع توزیع ترکیبی

توابع توزیع مختلفی برای مدل‌سازی احتمالی زمان سفر پیشنهاد شده است. این توابع توزیع را می‌توان به دو گروه کلی (۱) توابع تک-مؤلفه‌ای و (۲) توابع ترکیبی تقسیم‌بندی کرد [Yang and Wu, 2016]. توابع توزیع تک-مؤلفه‌ای، توزیع‌های متداول مانند توزیع لگ-نرمال هستند. در مقابل، توزیع‌های ترکیبی، توزیع‌های آماری هستند که از ترکیب محدب چندین توزیع آماری تک-مؤلفه‌ای ایجاد شده‌اند. فرض شود $\phi_1(x | \theta_1), \dots, \phi_H(x | \theta_H)$ توابع چگالی احتمال متناظر با H توزیع تک-مؤلفه‌ای، به ترتیب، با پارامترهای $\theta_1, \dots, \theta_H$ باشند. تابع چگالی احتمال یک توزیع ترکیبی به صورت

$$f(x | \Psi) = \sum_{h=1}^H \pi_h \phi_h(x | \theta_h), \quad (1)$$

تعریف می‌شود [Tatiana et al., 2009]. در رابطه بالا، Ψ بیانگر پارامترهای مدل ترکیبی و π_h ها مقادیر مثبت وزنی هستند که مجموع آن‌ها برابر با ۱ است؛ به عبارتی

$$\sum_{h=1}^H \pi_h = 1. \quad (2)$$

[Grün, 2016]

$$Q(\Psi | \Psi^{(s-1)}) = \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^H \pi_{ih}^{(s)} \left[\log(\pi_h) + \log(\phi_h(x_i | \theta_h)) \right]. \quad (5)$$

مرحله (۱) امید ریاضی و (۲) بیشینه‌سازی است. در مرحله اول (امید ریاضی) تکرار s ام الگوریتم EM امید ریاضی رابطه (۴) به شرط داده‌های مشاهداتی و پارامترهای به‌دست‌آمده در تکرار $s-1$ به صورت ذیل محاسبه می‌شود [Miljkovic and

جدول ۲. مشخصات توزیع‌های ترکیبی مورد استفاده در پژوهش حاضر

نام توزیع	تابع چگالی احتمال	تعداد پارامترهای توزیع
ترکیبی بور	$f(x) = \sum_{h=1}^H \pi_h \alpha_h \beta_h \left(\frac{x}{\gamma_h} \right)^{\alpha_h} / x \left(1 + \left(\frac{x}{\gamma_h} \right)^{\alpha_h} \right)^{\beta_h+1}$	4H
ترکیبی لگ-نرمال	$f(x) = \sum_{h=1}^H \pi_h \frac{1}{x \sigma_h \sqrt{2\pi}} \exp\left(-(\ln x - \mu_h)^2 / 2\sigma_h^2\right)$	3H
ترکیبی گاما	$f(x) = \sum_{h=1}^H \pi_h \frac{\beta_h^{\alpha_h}}{\Gamma(\alpha_h)} x^{\alpha_h-1} \exp(-\beta_h x)$	3H
ترکیبی گوسی معکوس	$f(x) = \sum_{h=1}^H \pi_h \sqrt{\frac{\alpha_h}{2\pi x^3}} \exp\left(-\alpha_h (x - \mu_h)^2 / 2x\mu_h^2\right)$	3H
ترکیبی ویبال	$f(x) = \sum_{h=1}^H \pi_h \frac{\alpha_h}{\beta_h} \left(\frac{x}{\beta_h} \right)^{\alpha_h-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta_h}\right)^{\alpha_h}\right)$	3H

می‌شوند [Miljkovic and Grün, 2016]. شایان ذکر است که برای برآورد پارامترهای مدل از بسته نرم‌افزاری FlexMix استفاده شده است [Grün and Leisch]. همچنین ذکر این نکته ضروری است که در پژوهش حاضر مشابه مطالعه مکلاکلن و پیل (۲۰۰۰) [McLachlan and Peel]، تخصیص هر مشاهده به یک مؤلفه به صورت تصادفی انجام شده است؛ به عبارتی دیگر، داده‌های مشاهداتی به صورت تصادفی به H دسته‌بندی شده‌اند.

۳-۲ معیارهای انتخاب مدل

برای ارزیابی میزان نیکویی برازش از «معیار اطلاعات آکائیک»^{۲۴} (AIC) و «معیار اطلاعات بیزی»^{۲۵} (BIC) استفاده می‌شود. دو معیار پیشگفته، نیکویی برازش و پیچیدگی مدل را هم‌زمان در انتخاب توزیع احتمال برتر در نظر می‌گیرند. بر اساس این معیارها، توزیع احتمالی که دارای کمترین مقدار AIC یا BIC باشد، بهترین توزیع احتمال جهت مدل‌سازی داده موردبررسی است. لازم به ذکر است که از این دو معیار در بسیاری از مطالعات

در رابطه فوق، n بیانگر تعداد داده مشاهده‌شده (اندازه نمونه)، x_i بیانگر داده i ام و π_{ih}^s مبین احتمال پسین متعلق بودن x_i به مؤلفه h ام توزیع ترکیبی است که در تکرار s ام الگوریتم EM به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\pi_{ih}^s = \frac{\pi_h^{(s-1)} \phi_h(x_i | \theta_h^{(s-1)})}{\sum_{u=1}^H \pi_u^{(s-1)} \phi_u(x_i | \theta_u^{(s-1)})}. \quad (6)$$

در مرحله دوم الگوریتم امید ریاضی-بیشینه‌سازی، θ_h و π_h با بیشینه کردن رابطه (۵) حاصل می‌شوند. در نهایت، وزن هر مؤلفه به صورت زیر به هنگام می‌شود:

$$\hat{\pi}_h^{(s)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \pi_{ih}^{(s)}. \quad (7)$$

لازم به ذکر است مسئله بیشینه‌سازی ممکن است به صورت تحلیلی قابل حل نباشد. در این صورت، از روش‌های بهینه‌سازی عددی جهت حل بیشینه‌سازی استفاده می‌شود. خواننده محترم برای آشنایی بیشتر با کاربرد روش‌های حل عددی در این مسئله خاص به پژوهش میلج‌کوویک و گرون^{۲۳} (۲۰۱۶) ارجاع داده

بررسی قابلیت توزیع‌های ترکیبی جهت مدل‌سازی زمان سفر

بلوتوث و زمان شناسایی آن دستگاه توسط سنسورهای بلوتوث ثبت می‌شوند. اختلاف بین زمان‌های شناسایی یک «مک آدرس» خاص توسط دو سنسور، به‌عنوان زمان سفر بین آن دو شناسگر در نظر گرفته می‌شود. داده‌های زمان سفر استفاده‌شده در این پژوهش محدود به بازه زمانی یک‌ساله از تاریخ ۱۳۹۸/۰۱/۰۱ تا ۱۳۹۸/۱۲/۲۹ است. شایان‌ذکر است که داده‌های مورد استفاده در این پژوهش در بازه‌های زمانی ۵ دقیقه‌ای جمع‌آوری شده‌اند و از وبسایت مرکز مدیریت راه‌های کشور استخراج شده‌اند. لازم به ذکر است که داده‌های استخراج‌شده به‌صورت فایل اکسل و حاوی چهار ستون با عناوین (۱) نام محور (برای مثال بومهن به تهران)، (۲) تاریخ (از ۱۳۹۸/۰۱/۰۱ تا ۱۳۹۸/۱۲/۲۹)، (۳) زمان (از ۰۰:۰۰ تا ۲۳:۵۵ با فاصله زمانی ۵ دقیقه‌ای) و (۴) زمان سفر (برحسب دقیقه) هستند. شایان‌ذکر است در پژوهش حاضر برای حذف داده‌های پرت از روش پیشنهادی در مطالعه ما و همکاران (۲۰۱۶) استفاده شده است [Ma et al., 2016].

۴. نتایج

یکی از دلایل مناسب نبودن توزیع‌های تک-مدی جهت مدل‌سازی زمان سفر، ماهیت چندقله‌ای (چند-مدی) داده‌های زمان سفر است. در پژوهش حاضر برای بررسی چند-مدی بودن داده‌های زمان سفر از آزمون تک-مدی هارتیگان^{۲۷} استفاده شده است [Hartigan and Hartigan, 1985]. بر اساس نتایج آزمون پیشگفته، توزیع زمان سفر به تفکیک ساعات روز برای تمامی ساعات و همه مسیرها چند مدی است؛ لذا می‌توان نتیجه گرفت که احتمالاً توزیع‌های تک‌مدی مانند توزیع نرمال نمی‌تواند گزینه مناسبی جهت مدل‌سازی تغییرپذیری زمان سفر باشند. برای بررسی دقیق‌تر این ادعا از شاخص‌های AIC و BIC استفاده شده است که نتایج در ادامه تشریح می‌شوند. شکل ۱ به‌صورت نمونه، توزیع زمان سفر مسیر کرج به قزوین را برای ساعت ۲۰:۰۰ تا ۲۱:۰۰ نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود توزیع زمان سفر در این حالت چند-مدی است.

پیشین مانند پژوهش یانگ و وو (۲۰۱۶) و گوسس و همکاران (۲۰۱۴) جهت ارزیابی دقت برازش استفاده شده است [Guessous et al., 2014; Yang and Wu, 2016]. معیارهای AIC و BIC برای یک توزیع احتمال مشخص به‌صورت

$$AIC = 2m - 2\ln(L), \quad (8)$$

$$BIC = m \ln(n) - 2\ln(L), \quad (9)$$

محاسبه می‌شوند. در رابطه فوق، L بیانگر مقدار بیشینه درستنمایی برای توزیع احتمال تخمین زده‌شده، n مبین اندازه نمونه و m بیانگر تعداد پارامترهای توزیع است [Akaike, 1998].

۳. تحلیل داده‌ها

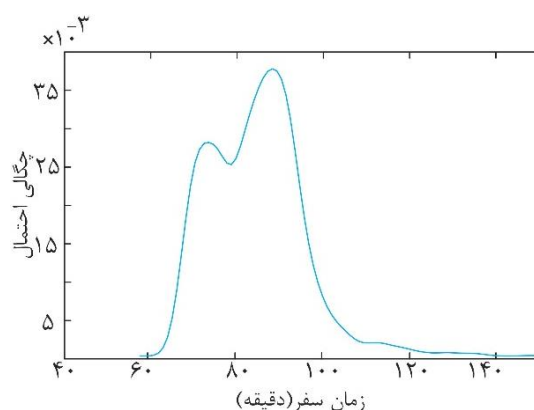
داده‌های مورد استفاده در این پژوهش مربوط به هشت مسیر به شرح جدول ۳ است.

جدول ۳. نام محورهای مورد بررسی

ردیف	نام محور	زمان سفر جریان آزاد (دقیقه)
۱	بومهن به تهران	۱۶
۲	قزوین به کرج	۵۸
۳	کرج به قزوین	۵۹
۴	تهران به کرج	۱۳
۵	کرج به تهران	۱۳
۶	قزوین به رشت	۱۱۰
۷	رشت به قزوین	۱۱۰
۸	ساوه به تهران	۶۰

هر یک از مسیرهای مورد بررسی مجهز به سنسور بلوتوث است. هر دستگاه الکتریکی مجهز به فناوری بلوتوث (برای مثال گوشی‌های همراه) دارای یک شناسه الکترونیکی منحصر به فرد با نام «مک آدرس»^{۲۶} است. منحصر به فرد بودن مک آدرس، امکان رهگیری دستگاه‌های الکتریکی مجهز به بلوتوث را فراهم می‌آورد. در حقیقت، مک آدرس یک دستگاه مجهز به فناوری

مجتبی رجبی بهاءآبادی



شکل ۱. توزیع زمان سفر برای ساعت ۲۱:۰۰-۲۰:۰۰

جدول ۴ برترین توزیع احتمال را بر اساس شاخص‌های AIC به ازای هر مسیر به تفکیک ساعات روز نشان می‌دهد.

جدول ۴. توزیع ترکیبی منتخب بر اساس معیار AIC به تفکیک ساعات مختلف روز

ساعت	بومهن به تهران	تهران به کرج	کرج به قزوین	کرج به تهران	قزوین به رشت	رشت به قزوین	ساوه به تهران	تهران به کرج
۰۷:۰۰-۰۶:۰۰	گاما	بور	بور	گاما	بور	بور	گاما	گاما
۰۸:۰۰-۰۷:۰۰	گاما	بور	بور	گاما	بور	بور	بور	بور
۰۹:۰۰-۰۸:۰۰	گاما	بور	بور	گاما	بور	بور	بور	بور
۱۰:۰۰-۰۹:۰۰	گاما	بور	بور	گاما	بور	بور	بور	بور
۱۱:۰۰-۱۰:۰۰	بور	بور	بور	گاما	بور	بور	بور	بور
۱۲:۰۰-۱۱:۰۰	بور	بور	بور	بور	بور	بور	بور	ویبال
۱۳:۰۰-۱۲:۰۰	بور	بور	بور	بور	گوسی معکوس	بور	بور	بور
۱۴:۰۰-۱۳:۰۰	بور	بور	بور	گاما	بور	بور	لگ-نرمال	بور
۱۵:۰۰-۱۴:۰۰	بور	بور	بور	بور	لگ-نرمال	بور	بور	بور
۱۶:۰۰-۱۵:۰۰	بور	بور	بور	بور	لگ-نرمال	بور	بور	بور
۱۷:۰۰-۱۶:۰۰	بور	بور	بور	بور	بور	بور	بور	بور
۱۸:۰۰-۱۷:۰۰	بور	بور	بور	بور	بور	بور	بور	گوسی معکوس
۱۹:۰۰-۱۸:۰۰	بور	بور	بور	بور	بور	بور	بور	بور
۲۰:۰۰-۱۹:۰۰	بور	بور	بور	بور	بور	بور	بور	لگ-نرمال
۲۱:۰۰-۲۰:۰۰	گاما	بور	بور	بور	بور	بور	بور	بور
۲۲:۰۰-۲۱:۰۰	بور	بور	بور	بور	بور	بور	بور	بور

جدول ۵. توزیع ترکیبی منتخب بر اساس معیار BIC به تفکیک ساعات مختلف روز

ساعت	بومهن به تهران	تهران به کرج	کرج به قزوین	کرج به تهران	قزوین به رشت	رشت به قزوین	ساوه به تهران	تهران به کرج
۰۷:۰۰-۰۶:۰۰	گاما	بور	بور	گاما	بور	بور	بور	گاما
۰۸:۰۰-۰۷:۰۰	گاما	بور	بور	گاما	بور	بور	بور	بور
۰۹:۰۰-۰۸:۰۰	گاما	بور	بور	گاما	بور	بور	بور	بور

بررسی قابلیت توزیع‌های ترکیبی جهت مدل‌سازی زمان سفر

ساعت	بومهن به تهران	قزوین به کرج	کرج به قزوین	تهران قزوین به رشت	رشت به قزوین	ساوه به تهران	تهران به کرج
۱۰:۰۰-۰۹:۰۰	گاما	بور	بور	گاما	بور	بور	بور
۱۱:۰۰-۱۰:۰۰	بور	بور	بور	گاما	بور	بور	بور
۱۲:۰۰-۱۱:۰۰	بور	بور	بور	بور	بور	بور	ویبال
۱۳:۰۰-۱۲:۰۰	بور	بور	بور	گوسی معکوس	بور	بور	بور
۱۴:۰۰-۱۳:۰۰	بور	بور	بور	گاما	بور	لگ-نرمال	بور
۱۵:۰۰-۱۴:۰۰	بور	بور	بور	بور	بور	بور	بور
۱۶:۰۰-۱۵:۰۰	بور	بور	بور	لگ-نرمال	بور	بور	بور
۱۷:۰۰-۱۶:۰۰	بور	گوسی معکوس	بور	بور	بور	بور	بور
۱۸:۰۰-۱۷:۰۰	بور	گوسی معکوس	بور	بور	بور	بور	بور
۱۹:۰۰-۱۸:۰۰	بور	گاما	بور	بور	بور	بور	بور
۲۰:۰۰-۱۹:۰۰	بور	بور	بور	بور	بور	بور	لگ-نرمال
۲۱:۰۰-۲۰:۰۰	لگ-نرمال	لگ-نرمال	بور	بور	بور	بور	بور
۲۲:۰۰-۲۱:۰۰	بور	بور	بور	بور	بور	بور	بور

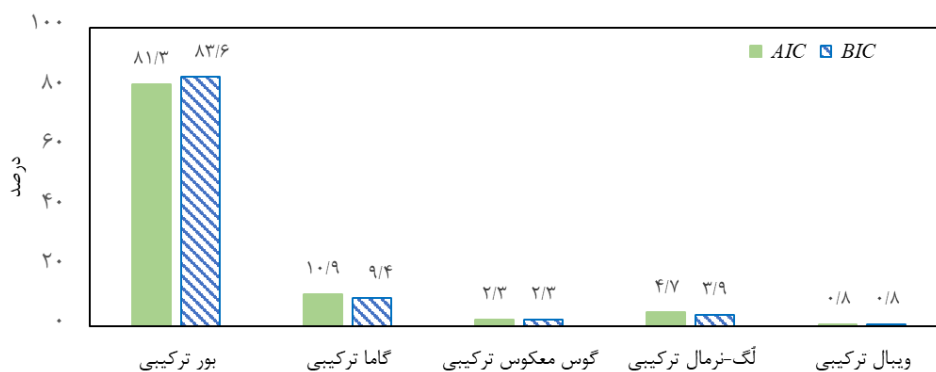
تابع توزیع احتمالی که دارای کمترین مقدار AIC حاصل از برازش باشد، رتبه یک و به تابع توزیع با بیشترین مقدار AIC رتبه پنج اختصاص داده شد. به همین روش، توابع ترکیبی مختلف برحسب شاخص BIC نیز رتبه‌بندی شده‌اند. شکل ۲ درصد مواردی که هر توزیع ترکیبی بر اساس معیارهای پیشگفته رتبه نخست (بهترین برازش را بر داده‌های زمان سفر داشته است) را به خود اختصاص داده است نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود توزیع ترکیبی بور در بالغ بر $۸۱/۳$ درصد موارد رتبه نخست را بر اساس شاخص AIC به خود اختصاص داده است. همچنین، بر اساس شاخص BIC نیز، توزیع ترکیبی بور حائز رتبه نخست در $۸۳/۶$ درصد موارد بوده است؛ بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که توزیع ترکیبی بور نسبت به سایر توزیع‌های ترکیبی با دقت بیشتری می‌تواند تغییرپذیری زمان سفر را مدل‌سازی نماید. همچنین، شکل ۳ درصد مواردی که هر توزیع ترکیبی بر اساس معیارهای پیشگفته رتبه دوم را به خود اختصاص داده است نشان می‌دهد. بر اساس شکل ۳ می‌توان نتیجه گرفت بعد از توزیع بور ترکیبی، توزیع‌های لگ-نرمال و گاما ترکیبی گزینه‌های مناسب‌تری نسبت به ویبال و

همان‌طور که در جداول ۴ مشخص است توزیع ترکیبی بور بهترین برازش را در اغلب ساعات بر داده‌های زمان سفر در مسیرهای مختلف داشته است.

همچنین جدول ۵، توزیع احتمال منتخب (توزیع احتمال متناظر با کمترین مقدار BIC) به ازای هر مسیر به تفکیک ساعات مختلف روز را بر اساس شاخص BIC نشان می‌دهد. همان‌طور که از جدول ۵ مشخص است، بر اساس شاخص پیشگفته، توزیع احتمال ترکیبی بور در اغلب ساعات روز برای مسیرهای مختلف، توزیع احتمال برتر است. همان‌طور که بیان شد داده‌های زمان سفر دارای چولگی قابل توجه به سمت راست هستند. از آنجایی که توزیع بور قادر به در نظر گرفتن چولگی‌های بالا است، لذا توزیع ترکیبی بور قادر است با دقت بیشتری نسبت به سایر توزیع‌های ترکیبی، این ویژگی زمان سفر را مدل‌سازی نماید.

در پژوهش حاضر، بر اساس معیارهای AIC و BIC ، توابع توزیع احتمال رتبه‌بندی شدند. به‌بیانی دقیق‌تر، بر اساس معیار اطلاعات آکائیک، هرچه میزان AIC متناظر با یک توزیع احتمال کمتر باشد، آن توزیع حائز رتبه بهتری می‌شود؛ به‌طوری‌که به

گوسی معکوس ترکیبی جهت مدل‌سازی زمان سفر هستند.



شکل ۲. درصد رتبه نخست انواع توزیع‌های ترکیبی جهت مدل‌سازی زمان سفر



شکل ۳. درصد رتبه دوم انواع توزیع‌های ترکیبی جهت مدل‌سازی زمان سفر

محدودی من جمله گاما و لگ-نرمال جهت مدل‌سازی زمان سفر بررسی شده بود. در پژوهش حاضر، طیف وسیع‌تری از توزیع‌های ترکیبی شامل توزیع‌های ترکیبی پیشگفته، توزیع ترکیبی بور، توزیع ترکیبی گوسی معکوس و توزیع ترکیبی ویبال مورد بررسی قرار گرفته است. جهت ارزیابی میزان نیکویی برازش داده‌های واقعی زمان سفر بر توزیع‌های احتمال از «معیار اطلاعات آکائیک» و «معیار اطلاعات بیزی» استفاده شد. نتایج پژوهش حاضر نشان داد که توزیع ترکیبی بور در بیش از ۸۰ درصد موارد بهترین برازش را بر داده‌های زمان سفر دارد. پس از توزیع ترکیبی بور، توزیع‌های ترکیبی گاما و لگ-نرمال می‌توانند گزینه‌های مناسبی برای مدل‌سازی زمان سفر باشند.

برای پژوهش‌های آتی پیشنهاد می‌شود توزیع مناسب به تفکیک شرایط مختلف ترافیکی تعیین شود. نتایج پژوهش حاضر مربوط به راه‌های برون‌شهری است؛ لذا نمی‌توان نتایج را به راه‌های

۵. نتیجه‌گیری

قابلیت اطمینان زمان سفر از منظر متولی سیستم حمل‌ونقل و مسافر از اهمیت بسزایی برخوردار است. اولین گام در بهبود قابلیت اطمینان زمان سفر و به تبع آن اطمینان از ورود به موقع مسافران به مقصد، اندازه‌گیری دقیق قابلیت اطمینان زمان سفر است.

تاکنون توزیع‌های مختلفی جهت مدل‌سازی زمان سفر پیشنهاد شده است. پژوهش‌های اخیر نشان داده‌اند که توزیع‌های ترکیبی گزینه مناسب‌تری نسبت به توزیع‌های تک-مدی هستند. یک از ضعف‌های پژوهش‌های پیشین استفاده از داده‌های یک یا دو مسیر جهت تعیین توزیع زمان سفر است. برای حذف این محدودیت، در پژوهش حاضر، داده‌های زمان سفر مربوط به هشت مسیر بزرگراهی منبای تصمیم‌گیری قرار گرفته است. علاوه‌براین، در پژوهش‌های پیشین قابلیت توزیع‌های ترکیبی

Kitagawa (Eds.), Selected Papers of Hirotugu Akaike (pp. 199-213). Springer New York.

– Arezoumandi, M. (2011). Estimation of Travel Time Reliability for Freeways Using Mean and Standard Deviation of Travel Time. *Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology*, 11(6), 74-84.

– Bhat, C. R., & Sardesai, R. (2006). The impact of stop-making and travel time reliability on commute mode choice. *Transportation Research Part B: Methodological*, 40(9), 709-730.

– Carrion, C., & Levinson, D. (2013). Valuation of travel time reliability from a GPS-based experimental design. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 35, 305-323.

– de Jong, G. C & ,Bliemer, M. C. (2015). On including travel time reliability of road traffic in appraisal. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 73, 80-95.

– Emam, E., & Al-Deek, H. (2006). Using Real-Life Dual-Loop Detector Data to Develop New Methodology for Estimating Freeway Travel Time Reliability. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, 1959, 140-150.

– Faouzi, N., & Maurin, M. (2007). Reliability of travel time under lognormal distribution. *Proceedings of the Transport Research Board 86th Annual Meeting*, Washington D.C.

– Ganjkanloo, A., Shariat Mohaymany, A., Bahaabadi, M. R., & Sayyad, A. (2020). Analysis of Travel Time Distribution for

شهری به‌راحتی تعمیم داد. در این راستا، پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های آتی با استفاده از داده‌های زمان سفر مربوط به انواع مختلف راه‌های شهری، توزیع یا توزیع‌های مناسب تعیین شوند.

۶. پی‌نوشت‌ها

1. Bhat and Sardesai
2. Carrion and Levinson
3. Tilahun and Levinson
4. Lomax
5. Van Lint
6. Tu
7. Zang
8. Wakabayash
9. Herman and Lam
10. Jordan and Turnquist
11. Gamma
12. Lognormal
13. Taylor and Susilawati
14. Burr distribution
15. Lu and Wang
16. Unimodal distribution
17. Multimodal
18. Yang and Wu
19. Ma
20. Weibull
21. Inverse gaussian
22. Expectation-Maximization
23. Miljkovic and Grün
24. Akaike Information Criterion (AIC)
25. Bayesian Information Criterion (BIC)
26. Media Access Control (MAC) address
27. Hartigan's Dip Test

۷. مراجع

– رجیبی بهاء‌آبادی، م، خادمی، ن، فروزنده، ر، شریعت مهیمنی، ا. (۱۳۹۷). تحلیل قابلیت اطمینان زمان سفر خطوط اتوبوس با استفاده از داده‌های سیستم موقعیت‌یاب جهانی. فصلنامه مهندسی حمل‌ونقل. دوره ۹، شماره ۳. صفحات ۲۹۵-۳۱۲.

– Akaike, H. (1998). Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle. In E. Parzen, K. Tanabe, & G. فصلنامه مهندسی ترافیک/ سال بیست و پنجم/ شماره ۱۰۰ / بهار ۱۴۰۴

- Lomax, T., Schrank, D., Turner, S., & Margiotta, R. (2003). Selecting travel time reliability measures. T. T. Institute.
- Lu, Y., & Wang, F. (2021). Travel Time Reliability Analysis of Arterial Road Based on Burr Distribution. Smart Transportation Systems 2021, Singapore.
- Ma, Z., Ferreira, L., Mesbah, M., & Zhu, S. (2016). Modeling distributions of travel time variability for bus operations. *Journal of Advanced Transportation*, 50(1), 6-24.
- McLachlan, S., Peel, D., (2000). *Finite Mixture Models*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.
- Miljkovic ,T., & Grün, B. (2016). Modeling loss data using mixtures of distributions. *Insurance: Mathematics and Economics*, 70, 387-396.
- Polus, A. (1979). A study of travel time and reliability on arterial routes [journal article]. *Transportation*, 8(2), 141-151.
- Rajabi-Bahaabadi, M., Shariat-Mohaymany, A., & Yang, S. (2019). Travel time reliability measures accommodating scheduling preferences of travelers. *Transportation Research Record*, 2673(4), 708-721.
- Rajabi-Bahaabadi, M., Shariat-Mohaymany, A., Babaei, M., & Vigo, D. (2021). Reliable vehicle routing problem in stochastic networks with correlated travel times. *Operational Research*, 21, 299-330.
- Rakha, H. A., Shawarby, I. E.-, Arafah, M., & Dion, F. (2006). Estimating Path Travel-Varying Length of Time Interval. *AUT Journal of Civil Engineering*, 4(2), 241-248.
- Gemma, A., Mannini, L., Carrese, S., Cipriani, E., & Crisalli, U. (2021). A gaussian mixture model and data fusion approach for urban travel time forecast. 7th International Conference on Models and Technologies for Intelligent Transportation Systems (MT-ITS) (pp. 1-6). IEEE.
- Ghavidel, M., Khademi, N., Bahrami Samani, E., & Kieu, L. M. (2022). A Random Effects Model for Travel-Time Variability Analysis Using Wi-Fi and Bluetooth Data. *Journal of Transportation Engineering, Part A: Systems*, 148(2), 05021012.
- Grün, B., & Leisch, F. (2008). FlexMix Version 2: Finite Mixtures with Concomitant Variables and Varying and Constant Parameters. *Journal of Statistical Software*, 28(4), 1–35
- Guessous, Y., Aron, M., Bhourri, N., & Cohen, S. (2014). Estimating travel time distribution under different traffic conditions. *Transportation Research Procedia*, 3, 339-348.
- Hartigan, J. A., & Hartigan, P. M. (1985). The Dip Test of Unimodality. *The Annals of Statistics*, 13(1), 70-84.
- Herman, R., & Lam, T. (1974). Trip time characteristics of journeys to and from work. *Transportation and traffic theory*, 6, 57-86.
- Jordan, W. C., & Turnquist, M. A. (1979). Zone Scheduling of Bus Routes to Improve Service Reliability. *Transportation Science*, 13(3), 242-268.
- فصلنامه مهندسی ترافیک/ سال بیست و پنجم/ شماره ۱۰۰ / بهار ۱۴۰۴

- Uno, N., Kurauchi, F., Tamura, H., & Iida, Y. (2009). Using Bus Probe Data for Analysis of Travel Time Variability. *Journal of Intelligent Transportation Systems*, 13(1), 2-15.
- Van Lint, J., Van Zuylen, H. J., & Tu, H. (2008). Travel time unreliability on freeways: Why measures based on variance tell only half the story. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 42(1), 258-277.
- Yao, B., Hu, P., Lu, X., Gao, J., & Zhang, M. (2014). Transit network design based on travel time reliability. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 43, 233-248.
- Yang, S., & Wu, Y.-J. (2016). Mixture Models for Fitting Freeway Travel Time Distributions and Measuring Travel Time Reliability. *Transportation Research Record*, 2594, 95-106.
- Wakabayashi, H. (2011). Travel time reliability indices for highway users and operators. *Network Reliability in Practice: Selected Papers from the Fourth International Symposium on Transportation Network Reliability*, Minnesota, USA.
- Zang, Z., Xu, X., Qu, K., Chen, R., & Chen, A. (2022). Travel time reliability in transportation networks: A review of methodological developments. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 143, 103866.
- Time Reliability. 2006 IEEE Intelligent Transportation Systems Conference, Toronto, Canada.
- Saw, K., Katti, B. K., Joshi, G. J., & Kedia, A. (2024). Travel time reliability evaluation using fuzzy-possibility approach: a case study of an Indian city. *Transportation Planning and Technology*, 1-19.
- Sweet, M. N., & Chen, M. (2011). Does regional travel time unreliability influence mode choice? *Transportation*, 38(4), 625-642.
- Tatiana, B., Didier, C., David, R. H., & Derek, Y. (2009). mixtools: an R package for analyzing finite mixture models. *Journal of Statistical Software*, 32(6), 1-29.
- Taylor, M. A. (2017). Fosgerau's travel time reliability ratio and the Burr distribution. *Transportation Research Part B: Methodological*, 97, 50-63.
- Taylor, M. A. P., & Susilawati. (2012). Modelling Travel Time Reliability with the Burr Distribution. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 54, 75-83.
- Tilahun, N. Y., & Levinson, D. M. (2010). A moment of time: reliability in route choice using stated preference. *Journal of Intelligent Transportation Systems*, 14(3), 179-187.
- Tu, H., van Lint, J., & van Zuylen, H. (2007). The influence of road geometry on travel time variability. *INSTR2007, The 3rd international symposium on transport network reliability*, Hague, The Netherlands.